

## Notes sur l'histoire des mathématiques.

Par

**H.-G. Zeuthen.**

Suite<sup>1)</sup>.

(Présenté à la séance du 11 janvier 1895.)

### IV. Sur les quadratures avant le calcul intégral, et en particulier sur celles de Fermat.

En langage mathématique, *réduire une question aux quadratures* cela veut dire simplement en ramener la solution à des intégrations de fonctions explicites. Cet emploi dans un sens purement analytique d'un terme géométrique nous est resté d'un temps où l'intégration n'était pas encore l'opération inverse de la différentiation.

Il n'est pas étonnant qu'à cette époque, où la géométrie était le seul organe d'opérations générales qui devaient embrasser jusqu'aux quantités incommensurables<sup>2)</sup>, on se servit aussi d'une représentation géométrique des intégrales.

Nous définissons à présent les intégrales par l'équation

$$\int_a^b y dx = \lim. \Sigma y \Delta x,$$

où  $y = f(x)$  représente une fonction de  $x$ . Sans se servir expressément des notions de l'infini et des limites, on savait

<sup>1)</sup> Voir aux p. 1 et 303 de l'année 1893 du Bulletin.

<sup>2)</sup> Voir ma 3<sup>e</sup> Note, ce Bulletin 1893, p. 330 et s.

depuis Archimède <sup>1)</sup> formuler exactement le problème de trouver la quantité que nous représentons par  $\lim. \sum y \Delta x$ , et l'on savait s'assurer par la méthode d'exhaustion, inventée par Eudoxe, qu'un résultat trouvé répondait bien à la question proposée. Le produit  $y \Delta x$  se représente par le rectangle de côtés  $y$  et  $\Delta x$ . Les  $\Delta x$  devant être les parties d'un segment de droite, la juxtaposition des rectangles et la diminution à l'infini des parties  $\Delta x$  conduisent immédiatement à représenter l'intégrale par l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les ordonnées  $x = a$  et  $x = b$  et la courbe  $y = f(x)$ .

Cependant l'usage général de cette aire pour représenter les intégrales ne remonte pas jusqu'à Archimède. Ce grand géomètre se servait d'une représentation plus analytique des formules

$$\int_0^x x dx = \frac{1}{2} x^2, \quad \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3} x^3.$$

Il avait en effet recours à l'expression de la somme et à celle de la somme des carrés des premiers nombres entiers. Il en déduit que

$$h + 2h + \dots + (n-1)h < \frac{n^2}{2} h < h + 2h + \dots + nh,$$

$$h^2 + (2h)^2 + \dots + (n-1)h^2 < \frac{n^3}{3} h^2 < h^2 + (2h)^2 + \dots + (nh)^2,$$

et il sait tirer de ces formules, dont il représente géométriquement les termes, le même profit que nous tirons des intégrations citées. La diversité des applications qu'il en fait, par exemple à la quadrature des spirales et à la cubature de segments de surfaces du second ordre, nous montre qu'il voit bien

---

<sup>1)</sup> Je renvoie à cet égard au 20<sup>e</sup> chapitre de mon traité des *sections coniques de l'antiquité*, publié d'abord en danois dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres* de Danemark, section des sciences, 6<sup>e</sup> série t. III, et ensuite en allemand (traduit par M. v. Fischer Benzon) sous le titre: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Copenhague 1886 (Höst & fils).

la généralité de la question qu'on se pose en cherchant une intégrale. On peut en conclure qu'il voit aussi que les autres questions, telles que les quadratures de l'ellipse, de la parabole (nous pensons ici seulement à sa quadrature *mécanique* de cette courbe) et de la sphère, où il évite l'intégration par des transformations particulières ou par un emprunt à la mécanique, appartiennent au même genre de problèmes.

Nous croyons qu'il n'était pas superflu de rappeler ici l'uniformité et la simplicité des considérations qu'il applique à ces questions, parce qu'on oublie trop souvent ces propriétés de ses procédés à cause des complications qu'entraîne la méthode d'exhaustion. On peut voir par une démonstration de Pappus que les géomètres de l'antiquité étaient bien en possession de cette conception simple des questions qui correspond à notre expression  $\lim. \Sigma y \Delta x$ . Pour réduire la détermination de l'aire d'une spirale d'Archimède à celle du volume d'un cône <sup>1)</sup>, Pappus ramène la détermination de l'aire d'un secteur de cercle inscrit ou circonscrit à un secteur de la spirale à celle du volume d'un cylindre inscrit ou circonscrit à une tranche du cône.

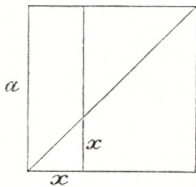
Kepler, qui, le premier dans les temps modernes, a repris les intégrations, ne donne, lui non plus, aucune représentation générale de cette opération, qu'il applique à des questions assez différentes. C'est seulement Cavalieri qui formula d'une manière uniforme — quoique peu précise — le problème de trouver la somme d'une infinité de termes infiniment petits.

Soit donné un carré de côté  $a$ ; décomposons-le en deux triangles par une de ses diagonales. Désignons par  $x$  le segment d'une parallèle aux deux côtés du carré qui est contenu dans l'un des triangles. Cavalieri dit qu'il cherche le rapport de *toutes les* puissances d'un certain degré ( $m$ ) des

<sup>1)</sup> Pappus, éd. Hultsch p. 236—239.



segments ( $x$ ) contenus dans le triangle à toutes les puissances du même degré des segments ( $a$ ) interceptés sur les mêmes



droites par les côtés opposés du carré. Cette manière d'exprimer le rapport de

l'intégrale  $\int_0^a x^m dx$  à  $a^{m+1}$  rappelle un peu

l'emploi qu'Archimède fait d'une progression arithmétique pour évaluer la même intégrale dans le cas où  $m = 1$  ou  $2$ . Quant

à la rigueur, elle le cède de beaucoup à celle d'Archimède; mais en appliquant sa méthode d'une manière correcte aux cas de  $m = 1, 2, 3, 4$ , Cavalieri en montre l'utilité générale. En y remplaçant les puissances des segments  $x$  par une fonction quelconque de  $x$ , on aurait une représentation générale d'une intégrale.

Cavalieri reconnaît aussi très bien la diversité des applications qu'on peut faire des intégrales qu'il a trouvées. Il applique par exemple son expression de l'intégrale  $\int_0^a x^2 dx$  à la quadrature de la parabole du second degré, à la cubature des cônes, et à une nouvelle quadrature de la spirale d'Archimède, sur laquelle nous aurons lieu de revenir.

La première de ces applications et les applications analogues des autres intégrales qu'il obtient font ressortir clairement l'identité des questions qui l'occupent avec les recherches sur la quadrature des paraboles et hyperboles de différents ordres qui commencent à la même époque d'occuper les plus éminents géomètres. Ces recherches ont laissé des traces dans nos cours actuels. On y rencontre, comme première application des intégrales définies, les quadratures de ces courbes, visiblement définies en vue de cette application. L'importance qu'ont eue ces courbes résulte du fait qu'originellement leur quadrature était la forme sous laquelle on cherchait à obtenir la valeur des intégrales  $\int x^m dx$ ,  $m$  étant positif ou



négalif suivant que la courbe appartenait aux paraboles ou aux hyperboles. Cette manière de représenter les intégrales  $\int x^m dx$  conduisait à s'occuper aussi des quadratures d'autres courbes, connues d'avance ou définies en vue d'y appliquer cette même opération, et à se servir de cette forme pour obtenir les mêmes avantages que nous cherchons en nous mettant en possession, dans nos cours, d'un certain nombre de fonctions intégrables.

Nous voilà conduits à la représentation des intégrations par les quadratures. Elle est beaucoup plus précise que celle de Cavalieri. Qu'elle fût géométrique, ce n'était pas un défaut à une époque où la géométrie était encore le langage officiel de la mathématique exacte et générale. Cette représentation n'a eu d'autre inconvénient que de faire oublier à plusieurs historiens qu'il s'agit ici, non seulement de telle ou telle application particulière des intégrations, mais du développement général de l'art d'intégrer. Du moins, M. Cantor semble-t-il s'être rendu coupable de cet oubli, ce qui l'a conduit à négliger une partie très essentielle des quadratures de Fermat, et à traiter de détours les applications qu'on faisait des quadratures. Nous reviendrons sur ce point.

C'est à Fermat qu'on doit la notion des paraboles de différents ordres ainsi que leur quadrature générale. On voit dans sa lettre à Roberval du 22 septembre 1636, où il appelle encore la parabole du 3<sup>e</sup> degré *une courbe comme la parabole*<sup>1)</sup>, et dans sa dissertation sur la rectification des courbes (1660), où il parle des «*infinite parabole quas olim speculati sumus*»<sup>2)</sup>, qu'il a inventé lui-même cette notion. Dans la lettre en question il communique à Roberval le résultat de la quadrature de la parabole cubique, intégration que Cavalieri d'ailleurs avait déjà effectuée dans sa Géométrie des indivisibles, publiée en 1635; mais ce n'est là pour

<sup>1)</sup> Fermat: *Varia Opera* p. 137.

<sup>2)</sup> *Varia Opera* p. 92; *Œuvres* de Fermat I, p. 216.

Fermat qu'un exemple de quadrature d'*infinies figures comprises de lignes courbes*. Ces lignes sont probablement les paraboles de tous les degrés entiers. Du moins une cubature qu'il y ajoute immédiatement a exigé aussi la quadrature des paraboles du quatrième degré. Roberval répond le 11 octobre 1636 dans le même sens, et raconte à Fermat qu'il a trouvé, lui aussi, la quadrature de toutes ces courbes, et il suppose que sa méthode ne diffère pas de celle de Fermat. Il dit avoir fait usage des inégalités <sup>1)</sup>

$$1^m + 2^m + \dots + n^m > \frac{n^{m+1}}{m+1} > 1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m.$$

Dans sa réponse du 4 novembre 1636 <sup>2)</sup> Fermat affirme la concordance présumée de leurs méthodes, mais il semble soupçonner que la démonstration de Roberval se borne en réalité aux cas de  $m = 2$  et  $3$ , où l'on savait déjà trouver exactement les sommes en question; mais il s'agit d'en connaître les valeurs pour toutes les valeurs de  $m$ . Il invite donc Roberval à *trouver la méthode générale pour voir*, dit-il, *si nous rencontrerons*.

En même temps Fermat déclare formellement que, de son côté, il est en possession de *tout ce qui se peut dire sur cette matière* et l'offre à Roberval. Malgré l'invitation qu'il lui fait de retrouver la méthode, ou peut-être pour rendre cette invitation plus facile à suivre, il lui communique déjà une proposition qui lui a servi à résoudre le problème. Elle contient la règle de formation des nombres figurés successifs. Si nous faisons usage de signes modernes, et si nous étendons les sommes  $\Sigma$  à toutes les valeurs entières de  $n$  depuis 1 jusqu'à  $n$ , cette règle consiste en ce que

<sup>1)</sup> Fermat: *Varia Opera* p. 140.

<sup>2)</sup> Ibid. p. 146.



$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\Sigma \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3},$$

$$\Sigma \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

.....

Une fois trouvée, cette règle est très facile à vérifier *a posteriori*. Elle conduit presque immédiatement à des formules récurrentes servant à déterminer successivement les différentes sommes  $\Sigma n^m$ . On est donc en état de reconstruire d'après la communication de Fermat la méthode dont il se servait pour obtenir l'aire des paraboles de tous les degrés entiers. Différente de celles dont se servait Archimède pour la parabole simple, elle est une extension des procédés qu'il employait ailleurs pour trouver les intégrales  $\int x dx$  et  $\int x^2 dx$ .

L'indication de Fermat nous garantit donc que, pour des valeurs entières et positives de  $m$ , il était dès 1636 en possession d'une démonstration complète de la formule  $\int_0^x x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ; cependant ses allusions n'étaient pas alors aussi faciles à saisir qu'elles le seraient aujourd'hui. Du moins, un géomètre aussi habile que Roberval ne parvient-il, dans une lettre perdue <sup>1)</sup> du 27 novembre, à établir que les expressions de  $\Sigma n^4$  et de  $\Sigma n^5$ , et cela d'une manière que Fermat, dans sa réponse du 16 décembre <sup>2)</sup>, ne trouve pas bien propre à suggérer une règle générale. Ce premier procédé de Fermat pour carrer les paraboles de degrés entiers resta inconnu aux géomètres de Paris. Ceci résulte du fait que Pascal, qui en 1654 retrouva la proposition sur la formation des nombres figurés, a

<sup>1)</sup> Cette lettre est-elle réellement perdue ou bien paraîtra-t-elle dans un des volumes attendus de la nouvelle édition des *Œuvres* de Fermat?

<sup>2)</sup> *Varia Opera*, p. 148.



cru lire dans une lettre de Fermat que leurs découvertes de ces formules étaient contemporaines <sup>1)</sup>.

Cependant les résultats que Fermat avait trouvés par la quadrature des paraboles ne pouvaient rester inconnus à Paris, où se formait à cette époque un centre de recherches mathématiques semblable à celui qui existait autrefois à Alexandrie, et où le magistrat de Toulouse, digne émule du grand Syracusain, dont il était à beaucoup d'égards le successeur immédiat, envoyait de temps en temps communication de ses découvertes, comme autrefois Archimède à Alexandrie. De Paris elles se répandaient chez les géomètres de toute l'Europe. Cette divulgation s'opérait pourtant beaucoup plus lentement qu'elle ne l'aurait fait si Fermat avait fait imprimer ses travaux. C'est seulement vers 1644 <sup>2)</sup> que Fermat communique les résultats de ses quadratures à Cavalieri par l'intermédiaire du P. Mersenne. Ce qui nous intéresse particulièrement dans cette communication, c'est qu'elle embrasse aussi les paraboles de degré fractionnaire, représentées par une équation de la forme  $a^m y^n = b^n x^m$ , c'est-

à-dire la détermination des intégrales  $\int_0^x x^{\frac{n}{m}} dx$ ,  $m$  et  $n$  étant positifs. Il est fort peu probable que, pour faire cette extension des quadratures des paraboles de degré entier, Fermat se soit contenté de l'induction hardie qu'on trouve plus tard dans l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis (1655). Sans doute Fermat peut s'être laissé guider dans ses recherches personnelles par des analogies de cette nature, mais il était trop l'élève des anciens, et trop peu admirateur des algorithmes, pour regarder comme une démonstration l'extension à des

<sup>1)</sup> M. Paul Tannery, qui a soutenu, dans le Bulletin des Sciences Mathématiques 2<sup>e</sup> série, t. VII, p. 118, la priorité absolue de Fermat pour cette proposition, parle aussi de l'application qu'en a faite son auteur à la quadrature des paraboles.

<sup>2)</sup> *Œuvres* p. 195.

valeurs fractionnaires ou négatives d'une formule démontrée seulement pour des valeurs entières et positives.

Il est donc presque certain que Fermat possédait en 1644 une démonstration des quadratures de toutes les paraboles. Serait-ce celle qu'il donne dans son Mémoire: *De Aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilinearum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus*<sup>1)</sup>, dont la rédaction définitive n'a été faite qu'après 1657<sup>2)</sup>? On sait que dans le même Mémoire Fermat applique une méthode semblable à la quadrature exacte des hyperboles d'un degré quelconque, notion qu'il introduit au commencement de ce Mémoire, tandis que Wallis avait déjà essayé de trouver les résultats des intégrations en question par une induction semblable à celle dont dépend sa quadrature des paraboles de degré fractionnaire.

La méthode originale pour obtenir et démontrer exactement les quadratures de toutes les paraboles et de toutes les hyperboles qu'on trouve dans le Mémoire de Fermat que nous venons de citer est trop connue pour qu'il soit nécessaire d'en rendre compte en détail. Cependant, comme on n'en a pas toujours reconnu toute la simplicité et l'exactitude<sup>3)</sup>, il ne sera pas superflu d'en rappeler les principes.

Fermat commence par rappeler que dans ses intégrations Archimède fait usage de progressions arithmétiques. C'est ce qu'il a fait en fondant ses déterminations de  $\int x dx$  et  $\int x^2 dx$  sur les expressions de la somme et de la somme des carrés des nombres naturels, méthode que Fermat avait généralisée,

<sup>1)</sup> *Varia Opera* p. 44—62; *Œuvres* I, p. 255—285.

<sup>2)</sup> Voir la citation de la *Curva Schotenii*. *Varia Opera* p. 53, *Œuvres* p. 276.

<sup>3)</sup> Cantor écrit t. II, p. 793: *Es lässt sich nicht verkennen, dass die Art, in welcher Fermat mit nahezu gleichen Elementen umspringt, eine sehr kühne ist.*

comme nous l'avons déjà vu. C'est seulement la quadrature de la parabole ordinaire qu'Archimède ramène à la sommation d'une progression géométrique; mais cette quadrature n'est pas une intégration.

De son côté, Fermat fait dépendre, dans sa quadrature des paraboles générales, la détermination de l'intégrale  $\int_0^x x^m dx$  de la sommation d'une progression géométrique. Il obtient cette intégrale en n'attribuant pas aux  $\Delta x$ , dans la somme  $\sum x^m \Delta x$ , dont elle est la valeur limite, des valeurs égales entre elles, mais en choisissant ces valeurs de manière que les termes de la somme, en nombre infini, forment une progression géométrique décroissante. Fermat rappelle l'expression exacte de la somme d'une telle progression.

Nous commencerons ici par sa quadrature des paraboles de degré fractionnaire,  $m = \frac{p}{q}$ ; elle comprend évidemment celle des paraboles de degré entier, dont Fermat avait depuis longtemps trouvé le résultat d'une autre manière. Fermat décompose l'aire représentée par l'intégrale  $\int_0^x x^{\frac{p}{q}} dx$  en des bandes limitées par les ordonnées correspondant aux abscisses suivantes:

$$x, \quad ax, \quad a^2x, \quad \dots$$

La raison constante  $a$  étant  $< 1$ , ces abscisses décroissent indéfiniment, jusqu'à zéro. Les bandes en question auront pour bases les différences  $\Delta x$  de ces abscisses, ou bien

$$(1-a)x, \quad a(1-a)x, \quad a^2(1-a)x, \quad \dots,$$

et pour hauteurs les ordonnées de la parabole  $y = x^{\frac{p}{q}}$  1):

$$x^{\frac{p}{q}}, \quad a^{\frac{p}{q}} x^{\frac{p}{q}}, \quad a^{\frac{2p}{q}} x^{\frac{p}{q}}, \quad \dots$$

1) Le paramètre n'étant qu'un facteur constant des éléments de l'intégrale, je le suppose égal à 1.



En substituant aux bandes les rectangles  $y\Delta x$ , on n'aura qu'à trouver la somme de la progression géométrique

$$(1-a)x^{\frac{p+q}{q}}, (1-a)\alpha^{\frac{p+q}{q}}x^{\frac{p+q}{q}}, (1-a)\alpha^{2\frac{p+q}{q}}x^{\frac{p+q}{q}}, \dots$$

Elle est égale à

$$\frac{1-a}{1-a^{\frac{p+q}{q}}}x^{\frac{p+q}{q}}.$$

Pour réduire cette somme de rectangles à l'aire parabolique cherchée, il faut chercher la valeur limite que prend cette somme dans le cas de bandes infiniment étroites, c'est-à-dire pour  $\alpha = 1$ . A cet effet Fermat remplace, à la manière des anciens, l'extraction de la racine  $q^{\text{ième}}$  de  $\alpha$  par  $q-1$  moyennes géométriques, ce qui équivaut à remplacer  $\alpha$  par  $\beta^q$ . Alors

$$\frac{1-a}{1-a^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1-\beta^q}{1-\beta^{p+q}} = \frac{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{q-1})}{(1-\beta)(1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{p+q-1})},$$

expression dont la valeur limite pour  $\beta = 1$  est évidemment égale à  $\frac{q}{p+q}$ <sup>1)</sup>.

Pour obtenir la quadrature analogue des hyperboles — par où commence le mémoire cité de Fermat — il suffit de limiter les bandes dans lesquelles on décompose l'aire cherchée  $\int_x^\infty \frac{dx}{x^m}$  par les ordonnées correspondant aux abscisses, en nombre infini,

$$x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots,$$

$\alpha$  étant  $> 1$ . Les rectangles  $\frac{\Delta x}{x^m}$  formeront alors une progres-

<sup>1)</sup> Les segments *TS, SE, ER, RV, VB, quæ inter se, propter nostram methodum logarithmicam, censentur æqualia* (*Œuvres* I, p. 265; *Varia Opera* p. 48), ont précisément, si l'on fait usage de nos notations, les valeurs

$$x(1-\beta)\beta^4, x(1-\beta)\beta^3, x(1-\beta)\beta^2, x(1-\beta)\beta, x(1-\beta).$$

L'égalité des valeurs limites qu'ils prennent pour  $\beta = 1$  est donc bien établie.

sion géométrique ayant pour premier terme  $\frac{\alpha-1}{x^{m-1}}$  et pour raison  $\frac{1}{\alpha^{m-1}}$ . Sous la condition  $m > 1$ , la somme devient donc égale à

$$\frac{\alpha^{m-1}}{x^{m-1}} \frac{\alpha-1}{\alpha^{m-1}-1},$$

dont on détermine la valeur limite pour  $\alpha = 1$ , savoir  $\frac{1}{(m-1)(x-1)}$ , aussi facilement que dans le cas des paraboles.

Nous avons fait usage de signes modernes pour faire ressortir, aux yeux de lecteurs modernes, toute la simplicité de l'idée de Fermat et la généralité de sa méthode. Lui-même il se contente de la représentation géométrique des anciens, et il ne l'applique immédiatement qu'à l'hyperbole  $y = \frac{\alpha}{x^2}$  et aux paraboles  $y^2 = ax$  et  $y^3 = ax^2$ ; mais il désigne expressément les quadratures de ces courbes comme des exemples et il en tire les résultats les plus généraux. Il connaît donc bien la généralité de sa méthode, dont la simplicité a été assurément bien évidente pour lui. Elle se sera aussi présentée aux lecteurs de son temps, plus accoutumés à la représentation géométrique, mieux qu'elle ne le fait à nous autres modernes mathématiciens.

La quadrature de Fermat n'est pas immédiatement applicable aux hyperboles dont le degré est  $< 1$ ; mais on sait que les degrés prennent des valeurs inverses par une interversion des deux axes coordonnés, interversion dont Fermat sait même faire des applications plus compliquées, comme nous le verrons dans ce qui suit. La seule hyperbole qui se dérobe à sa quadrature est donc l'hyperbole ordinaire, où  $m = 1$ ; mais il fait observer que dans ce cas les bandes qui résultent de sa décomposition deviennent égales entre elles, propriété qui avait été déjà démontrée dans l'*Opus Geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent (1647).

On s'étonnera peut-être qu'en faisant cette remarque Fermat n'exprime pas les aires hyperboliques au moyen des loga-

rithmes, qui ne lui étaient pas inconnus <sup>1)</sup>. Quant à l'évaluation numérique des aires, un recours aux logarithmes, dont on possédait déjà des tables assez étendues, aurait certainement été un véritable avantage; mais cet avantage était moins évident dans un travail théorique. A cette époque on n'étudiait pas les fonctions, et la réduction d'une question géométrique à une expression logarithmique n'aurait pas été regardée comme une bonne solution. C'était, au contraire, l'expression des logarithmes au moyen des aires hyperboliques, et la réduction des questions sur les logarithmes à des questions relatives à une courbe aussi connue que l'hyperbole ordinaire, qui était utile pour l'étude exacte des logarithmes. C'est, par exemple, par cette voie que Lord Brouncker a trouvé la série qui représente  $\log 2$ , et qu'il en a démontré la convergence.

Le titre même du travail de Fermat auquel nous avons emprunté ces quadratures des paraboles et des hyperboles montre qu'il a un but beaucoup plus général que ces quadratures particulières. En parlant des applications de la *transmutation* et de l'*émendation* des équations de courbes *ad multimodam curvilíneorum inter se vel cum rectilíneis comparationem*, il a en vue ce que, dans le langage du calcul intégral, nous appellerions la transformation et la réduction des intégrales à d'autres intégrales ou à des fonctions algébriques.

Les aires curvilignes auxquelles il sait réduire les quadratures de différentes courbes sont en première ligne les aires déjà trouvées des paraboles et des hyperboles à l'exception de l'hyperbole ordinaire; et grâce à ses quadratures de ces courbes il obtient alors une réduction à des aires rectilignes (intégration par des fonctions algébriques). Il ramène encore certaines quadratures soit à celle de l'hyperbole ordinaire, c'est-à-dire, en langage moderne, à des logarithmes, soit à la quadrature du cercle, c'est-à-dire à des fonctions circulaires. Nous ver-

<sup>1)</sup> Voir notre citation dans la note en bas de la p. 47.



rons d'importants exemples de ces réductions, et la place qu'il leur donne dans le titre de son mémoire montre qu'il voit clairement l'importance de ces réductions et des méthodes qui l'y conduisent.

Parmi ces méthodes nous n'avons pas besoin d'insister sur celle qui correspond à la décomposition suivante d'une intégrale :

$$\int (y_1 + y_2 + y_3 + \dots) dx = \int y_1 dx + \int y_2 dx + \int y_3 dx + \dots$$

Déjà Archimède savait s'en servir dans sa cubature des hyperboloïdes. Nous en venons tout de suite aux intégrations par parties, procédé dont Fermat fait un large emploi en y joignant un usage plus limité de l'intégration par substitution <sup>1)</sup>.

Commençons par considérer la forme de ses intégrations par parties. Il y parvient par une simple interversion des deux coordonnées. Soit à déterminer une aire limitée par les deux axes coordonnés et par une courbe dont nous écrivons l'équation  $y = \varphi(x)$ , et désignons par  $a$  et  $b$ , respectivement, l'abscisse de son point d'intersection avec l'axe des  $x$  et l'ordonnée de son point d'intersection avec l'axe des  $y$ . On suppose de plus que dans l'intervalle de ces deux points les  $y$  décroissent en même temps que les  $x$  croissent. En égalant les deux expressions de cette aire, on aura

$$\int_0^a y dx = \int_0^b x dy. \quad (1)$$

On obtient donc la même réduction des intégrales que celle qui résulterait d'une intégration par parties, et on obtiendrait la formule qui exprime complètement cette opération par un autre choix des limites ou des axes coordonnés. Fermat nous montre, à l'occasion du premier exemple où il en a besoin, qu'il sait obtenir les mêmes avantages par une décomposition des

<sup>1)</sup> *Œuvres* p. 271 et s.; *Varia Opera* p. 51 et s.

aires cherchées en des aires qui satisfont aux conditions indiquées <sup>1)</sup>).

Cependant cette transformation n'est guère utile tant qu'on ne sait pas transformer ultérieurement la dernière intégrale par la différentiation de la fonction  $y$ . Il est vrai que Fermat avait déjà inventé les principes de la différentiation, et qu'il savait les appliquer à la détermination des *maxima* et *minima* et des *tangentes* <sup>2)</sup>); mais à l'exception d'une application assez indirecte à la détermination des centres de gravité de certaines aires et de certains volumes, la connexion de ces principes avec la détermination des intégrales lui était inconnue. Fermat a donc besoin d'établir directement des résultats plus féconds que l'équation (1). Il en énonce alors la généralisation suivante

$$\int_0^a y^n dx = n \int_0^b y^{n-1} x dy. \quad (2)$$

Il ne nous communique que très peu de choses sur sa déduction de cette dernière formule. Cependant pour  $n = 2$  il en donne une interprétation stéréométrique qui laisse entrevoir comment il a trouvé le résultat dans ce cas particulier. Sa remarque que la réduction générale se fait avec la même facilité <sup>3)</sup> porte à supposer qu'il a trouvé la formule générale par une extension du même procédé.

Dans le cas de  $n = 2$ , il dit que la somme des solides  $y^2 dx$  — qu'il décrit assez clairement dans le langage qui était à sa disposition — devient égale à la somme des solides  $y x dy$  doublés. Il a pu trouver ce résultat en considérant les moitiés des premiers solides, obtenues en décomposant les bases carrées par les diagonales qui rencontrent l'axe des  $x$ . Le lieu de ces diagonales sera le plan qu'en introduisant un troisième

<sup>1)</sup> *Œuvres* p. 275; *Varia Opera* p. 52.

<sup>2)</sup> *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*. *Œuvres* p. 133 et s.; *Varia Opera* p. 63 et s.

<sup>3)</sup> *Œuvres* I, p. 272. *Varia Opera* p. 51.

axe coordonné on représenterait par l'équation  $z = y$ . Alors le volume moitié de celui que représente l'intégrale  $\int_0^a y^2 dx$  sera égal à  $\int_0^b z x dy = \int_0^b y x dy$ , ce qu'il fallait démontrer.

Pour avoir de cette déduction une généralisation simple et pouvant être attribuée à Fermat, qui avait carré les paraboles de tous les degrés, il suffit d'y substituer  $z = y^{n-1}$  à  $z = y$ . Alors  $y^n$  ou l'aire  $yz$  est  $n$  fois l'aire  $\int_0^y z dy$ , et le volume  $\int_0^a y^n dx$  devient  $n$  fois le volume qu'en intervertissant les deux axes coordonnés on peut exprimer par l'intégrale  $\int_0^b x z dy$  ou par  $\int_0^b y^{n-1} x dy$ .

Une chose contribue encore à rendre vraisemblable que, pour parvenir au résultat exprimé par la formule (2), Fermat a bien suivi cette voie, que nous avons jugée être la plus conforme à ses courtes indications: c'est l'identité de cette démonstration avec celle qu'a donnée Pascal du premier *Lemme général* de son *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets* (1659). Ce lemme est la généralisation du théorème de Fermat qu'on obtient en ne se bornant pas, dans la déduction que nous lui avons attribuée, au cas où  $z = y^{n-1}$ , mais en y substituant une fonction quelconque de  $y$ . Avec nos notations ce lemme s'écrirait

$$\int_0^b z x dy = \int_0^a dx \int_0^y z dy,$$

où  $y$  et  $z$  sont des fonctions quelconques de  $x$  et  $y$ , représentées par des courbes; l'intégrale  $\int_0^y z dy$  est représentée par une aire <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Pascal: *Œuvres*, édition de 1779, t. V, p. 276; édition de 1872, III, p. 385. MM. Maximilien Marie et Cantor, dans leurs travaux historiques, rendent très bien compte de ce lemme; le premier auteur parle aussi des importantes applications qu'en fait Pascal; mais ils



Cette identité nous garantit du moins que nous ne nous sommes pas laissé tenter par les signes modernes, dont nous nous sommes servi pour plus de brièveté, d'attribuer à Fermat des pensées trop modernes. De quelque manière qu'il ait trouvé ses résultats, Fermat les énonce avec une sûreté qui montre bien qu'il les possède complètement. Nous allons voir qu'il savait très bien en profiter.

Fermat fait de la méthode exprimée par notre formule (2) une double application. Il donne à des intégrales connues la forme  $\int y^n dx$  et en déduit les intégrales  $\int xy^{n-1} dx$ , ou inversement. Sa représentation des fonctions se faisant uniquement par des courbes, et celle des intégrales par des quadratures, chacun de ces deux procédés demande deux substitutions, que nous indiquerons ici en égalant à 1 la constante qu'introduit Fermat pour conserver l'homogénéité géométrique. Dans les représentations géométriques, les deux variables, considérées après chaque nouvelle substitution, sont toujours prises pour coordonnées rectangulaires.

Soit  $z = \varphi(x)$  une courbe carrable. Si l'on pose  $z = y^n$  (ou  $z = xy^{n-1}$ ),  $n$  ayant une valeur convenable, et ensuite

---

ont le tort de ne pas mentionner que les plus essentielles de ces applications ont été faites aussi par Fermat. Au contraire, M. Brassine, dans un livre cité par M. Marie, et M. Tannery, dans la note en bas de la p. 271 des *Œuvres de Fermat*, t. 1, reconnaissent parfaitement l'identité essentielle de l'usage que fait Fermat du théorème exprimé par la formule (2) avec celui qu'on fait à présent de l'intégration par parties.

Ce serait une tâche très difficile que de retrouver les suggestions, plus ou moins directes, qui ont pu amener cette coïncidence dans l'invention d'une même méthode si féconde. Peut-être la suite de la nouvelle édition des *Œuvres de Fermat* contribuera-t-elle à faciliter cette investigation. Dans le cas contraire, il faudra sans doute se contenter de voir dans cette simultanéité une simple conséquence du fait que cette importante invention avait été préparée par les autres progrès réalisés dans la même direction. La priorité de la publication appartient en tout cas à Pascal, et, ne connaissant pas même la date de la rédaction du mémoire de Fermat, nous ne pouvons pas constater son indépendance du travail cité de Pascal.

$t = xy^{n-1}$  (ou  $t = y^n$ ), l'équation  $t = \phi(y)$  qu'on obtient par l'élimination de  $x$  et  $z$  représentera une nouvelle courbe carrable. L'application de ce procédé peut être répétée un nombre illimité de fois. Fermat sait ainsi déduire d'une seule quadrature (ou intégration) connue un nombre illimité de quadratures. A côté de ces procédés synthétiques, qui conduisent à de nouvelles quadratures, il applique inversement une méthode analytique à la recherche de la quadrature de courbes données (intégration de fonctions données). A cet effet il fait subir à la courbe  $z = \varphi(x)$ , dont la quadrature  $\int z dx$  est inconnue, une série de transformations analogues à celles dont nous venons de rendre compte, jusqu'à ce qu'il trouve soit une courbe carrable algébriquement, soit une courbe, telle que le cercle, dont la quadrature peut être regardée comme connue.

Telle est la méthode générale de Fermat. Il donne expressément les applications qu'il en fait comme des exemples. Ces exemples servent toutefois à nous montrer l'étendue du domaine dans lequel Fermat a su utiliser sa méthode.

Pour bien comprendre le choix des substitutions qu'il applique à chaque exemple, il faut bien remarquer les bornes dans lesquelles ses méthodes sont enfermées, en comparaison de celles dont nous disposons à présent, et les difficultés particulières qui en résultent pour lui. Ses substitutions servent toujours à introduire une nouvelle variable dépendante dans la fonction à intégrer; mais elles ne portent pas sur la variable indépendante de l'intégrale. Il n'en peut être autrement, parce qu'en transformant la variable  $x$  de l'intégrale  $\int z dx$  il faudrait savoir y introduire la nouvelle valeur de la différentielle  $dx$ . Seulement, dans la formule fondamentale (2) où  $x = y^n$ , il a su surmonter cette difficulté, non pas à cause de sa connaissance de la différentielle  $d(y^n)$ , mais à cause de sa connaissance de la quadrature  $\int y^{n-1} dy$ , ce que nous avons déjà montré. La substitution  $x = \varphi(t, y)$ , servant à remplacer la variable indépendante  $x$  d'une intégrale de la forme  $\int y^n dx$  par



une nouvelle variable  $t$ , doit donc toujours être précédée d'une intégration par parties, de façon que la substitution s'applique à l'intégrale  $\int xy^{n-1}dy$  où  $x$  n'est plus variable indépendante.

Dans le premier des exemples que donne Fermat, les aires dont il parle sont limitées par les axes coordonnés; nous pourrions donc les désigner par des intégrales définies. Comme, dans la plupart des autres exemples, la transformation des limites demanderait des indications particulières, et que Fermat n'en donne aucune, nous devons traduire ses quadratures par des intégrations indéfinies; mais — à une seule exception près — Fermat se borne à montrer la possibilité de résoudre ces questions plus générales que ne le serait l'évaluation d'intégrales définies par des limites simples.

Dans les trois premiers exemples, Fermat suppose connues des intégrales de la forme  $\int y^n dx$  et en déduit des intégrales de la forme  $\int xy^{n-1}dy$ .

1°. Si  $y^2 = a^2 - x^2$ , on trouve immédiatement l'intégrale  $\int_0^a y^2 dx$ . La formule (2) montre que  $\int_0^a xy dy$  en est la moitié. Fermat sait donc trouver  $\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} y dy$ , ou bien, comme il le dit en évitant les irrationnelles, carrer la courbe  $t^2 = a^2 y^2 - y^4$ .

2°. Si  $y^3 = ax^2 - x^3$ , on trouve immédiatement l'intégrale  $\int y^3 dx$ . On en déduit l'intégrale  $\int xy^2 dy$ , ou bien, en égalant  $xy^2$  à  $a^2 t$ , la quadrature de la courbe  $a^6 t^3 = a^5 t^2 y^2 - y^9$ .

3°. Si  $y^3 = \frac{a^5 x - a^6}{x^3}$ , on trouve immédiatement la valeur de  $\int y^3 dx$ , et ensuite, au moyen de la formule (2), celle de  $\int y^2 x dy$ , ou bien, en posant  $y^2 x = a^2 t$ , la quadrature de la courbe  $t^3 + y^3 = aty$ . Fermat reconnaît dans cette courbe celle dont Schooten venait d'étudier d'autres propriétés, et qu'à présent on désigne ordinairement sous le nom de *folium* de Descartes. Cette quadrature que Fermat obtient ici par une synthèse, il



est probable qu'il l'a originairement trouvée par l'analyse inverse de cette synthèse, c'est-à-dire en transformant la courbe  $t^3 + y^3 = aty$  en  $y^3 = \frac{a^5x - a^6}{x^3}$  et l'intégrale  $\int t dy$  en  $\int y^2 x dy$  au moyen de la substitution  $a^2t = y^2x$ , ce qui ramène l'intégration à celle de  $\int y^3 dx$ . En effet, Fermat donne plus loin des applications de cette méthode analytique.

Fermat donne ensuite des exemples de la méthode inverse où l'intégrale  $\int y^{n-1} x dy$  est connue et sert à la déduction de  $\int y^n dx$ . Nous omettons ceux de ses exemples qui ne sont que les inverses des deux premiers. Fermat indique ensuite en deux lignes une application fort intéressante de cette méthode<sup>1)</sup>, en disant qu'elle permet de passer sans aucune peine des paraboles aux hyperboles, et réciproquement, *ut experientiâ constabit*. Afin de faire l'expérience à laquelle il nous invite, posons  $y^r = xy^{n-1}$ . L'intégrale  $\int y^r dy$ , qui représente la quadrature d'une parabole, sera égale à  $\int xy^{n-1} dy$ . La méthode de Fermat permet de passer de celle-ci à l'intégrale  $\int y^n dx$ , qui sera égale à  $\int x^{\frac{n}{r+1}-n} dx$ . Cette intégrale représentera la quadrature d'une nouvelle parabole si  $n < r+1$  et celle d'une hyperbole si  $n > r+1$ . L'ordre de la nouvelle courbe ne sera entier que dans le cas où  $n$  est divisible par  $r+1-n$ . Il nous paraît difficile d'expliquer autrement la courte indication de Fermat; nous le voyons donc en possession d'un nouveau moyen de déduire les quadratures de toutes les paraboles et hyperboles (à l'exception de l'hyperbole ordinaire) de celles des paraboles d'ordre entier, qu'il connaissait depuis longtemps, connaissance dont dépend aussi la méthode traduite par notre formule (2). Il semble toutefois que Fermat se soit borné à reconnaître la possibilité de parvenir ainsi à ce résultat.

Dans les exemples suivants Fermat passe à des quadratures qui se réduisent par sa méthode à celle du cercle, ou

<sup>1)</sup> Œuvres I, p. 277. *Varia Opera* p. 53.

en langage moderne à des intégrales exprimables au moyen de  $\pi$  ou de fonctions circulaires. Un de ces exemples fournit la détermination complète de l'aire limitée par la courbe  $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$  et par l'axe de  $x$ , qui en est l'asymptote, c'est-

à-dire la démonstration de l'égalité  $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi a^2}{2}$ . Pour

parvenir à la solution de ce problème, qui lui avait été proposé *ab erudito geometrà*, Fermat commence par appliquer l'analyse suivante à la quadrature  $\int y dx$ . Par la substitution  $z^2 = ay$  cette intégrale se transforme en  $\frac{1}{a} \int z^2 dx$ ; celle-ci dépend, d'après sa méthode, de l'intégrale  $\int xz dz$ , ou, si l'on pose  $xz = at$ , de l'intégrale  $\int t dz$ . Or on trouve, par l'élimination de  $x$  et  $y$ ,  $t^2 = a^2 - z^2$ . L'intégrale  $\int t dz$  représente donc un aire circulaire. On aura en particulier au moyen de ces substitutions

$$\int_0^{\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} z^2 dx = \frac{2}{a} \int_0^a xz dz = 2 \int_0^a t dz = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Fermat a surmonté de plus grandes difficultés en appliquant sa méthode à la réduction successive des intégrales de la forme  $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx$  où  $n$  est un nombre impair. Sa réduction n'est pas toutefois identique à celle qu'on trouve dans les cours classiques de calcul intégral, et les remarques que nous avons déjà faites sur sa méthode expliquent la raison de cette différence. La méthode ordinaire de réduction exige en effet la différentiation de  $(a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}$ . Il nous intéresse d'autant plus de savoir comment Fermat s'y prend pour parvenir au même but.

Si l'on suppose  $y^2 = a^2 - x^2$ , l'intégrale  $\int y^3 dx$  se réduit, par la méthode de Fermat et par les substitutions successives  $xy = at$  et  $y^2 = az$ , d'abord à  $\int xy^2 dy$ , puis à  $\int ty dy$ , ensuite à  $\int y^2 dt$ , et enfin à  $\int z dt$ . La courbe finale dont l'équation résulte



de l'élimination de  $x$  et  $y$  étant le cercle  $t^2 + z^2 = az$ , la dernière intégrale représente une aire circulaire. Fermat ajoute que pour des valeurs plus élevées du nombre impair  $n$  on aura besoin de répéter plusieurs fois la même réduction. C'est ce qu'on voit en appliquant exactement les mêmes substitutions. Alors on passera par les intégrales suivantes

$$\int y^n dx, \int xy^{n-1} dy, \int ty^{n-2} dy, \int y^{n-1} dt, \int z^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

$z$  étant égal à  $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - t^2}$ , et  $\frac{n-1}{2}$  à un entier plus petit que  $n$ , on arrive à des intégrales de la même nature mais plus simples que l'intégrale proposée. La réduction de Fermat marche même plus vite que la réduction ordinaire, qui ne fait que diminuer l'exposant  $n$  de deux unités, mais elle le cède à celle-ci quant à l'uniformité, qui a ici une grande valeur.

Le dernier exemple de Fermat va nous servir à montrer le grand nombre de transformations successives que peut nécessiter sa méthode en même temps que la puissance dont il fait preuve pour inventer les transformations qui conduisent au but. Il s'agit de trouver la quadrature de la courbe  $y^2 = \frac{a^7x - a^8}{x^6}$ , ou bien l'intégrale  $\int \frac{\sqrt{a-x}}{x^3} dx$ , assez facile à déterminer par les méthodes modernes de substitution. Fermat préfère chercher l'intégrale  $\int x dy$ , que, grâce à sa méthode et aux substitutions successives

$ax = z^2, yz = at = u^2, zu = av, au = vs, v^2 = ap = sq, s^2 = ar$ ,  
il exprime successivement au moyen de

$$\int z^2 dy, \int yz dz, \int t dz, \int u^2 dz, \int uz du, \int v du, \int u dv, \int vs dv, \int v^2 ds, \\ \int p ds, \int sq ds, \int s^2 dq, \int r dq.$$

L'équation en  $r$  et  $q$  qui résulte de l'équation donnée en  $x$  et  $y$  au moyen des substitutions successives est  $q^2 = ar - r^2$ . Fermat a donc réduit la quadrature demandée à celle du cercle; mais il est difficile de retrouver ici l'idée qui a guidé ses pas vers ce résultat exact.



Ces exemples montrent jusqu'à quel point Fermat connaissait l'utilité de sa méthode. Il savait l'appliquer également bien d'une manière synthétique à déduire de nouvelles classes de fonctions intégrables (courbes carrables) de celles qu'il connaissait déjà, et d'une manière analytique à réduire les quadratures qui lui étaient proposées, ou qu'il trouvait l'occasion de se proposer à lui-même, à des quadratures connues. Il embrassait donc toute une théorie des quadratures, telle qu'elle pouvait exister avant la découverte, due à Newton, de la connexion des opérations de différentiation et d'intégration. Dans cette théorie il fallait encore remplir les cadres par la spécification de courbes carrables, par l'exécution d'intégrations dont Fermat ne fait que démontrer la possibilité, par l'extension des principes d'intégration aux fonctions trigonométriques, etc. On doit à cet égard d'importantes contributions aux éminents contemporains de Fermat, contributions plus ou moins indépendantes des siennes, qui ne furent imprimées qu'en 1679 dans les *Varia Opera*.

Toutefois nous ne nous attacherons pas ici à suivre ce développement, et encore moins à étudier la question de l'originalité des différents auteurs; nous nous contenterons d'avoir appris à connaître comment les principes de ce développement furent créés par Fermat, du moins en très grande partie<sup>1)</sup>. Nous pourrions d'autant mieux omettre ici les autres essais qui servirent de préparation au calcul intégral que M. Maximilien Marie a déjà rendu compte d'une manière très complète des contributions de Pascal, et que celles de Wallis sont encore mieux connues. Nous avons seulement quelques remarques à faire sur la nature des quadratures de ce dernier savant, dont l'*Arithmetica infinitorum*, publiée en 1655, est devenue ensuite la source

---

<sup>1)</sup> L'*Arithmetica infinitorum* de Wallis a pu conduire Fermat à s'occuper de la quadrature des hyperboles. Voir aussi la note aux p. 52—53.

principale de la connaissance des quadratures générales des paraboles et hyperboles, comme la *Geometria indivisibilium* de Cavalieri (1635) l'était déjà pour les principes généraux de l'intégration.

On sait que Wallis obtient les quadratures des paraboles de degré fractionnaire et — d'une manière moins complète — celle des hyperboles par ce qu'il appelle une interpolation, c'est-à-dire en réalité par une simple extension des résultats démontrés pour des exposants entiers et positifs. M. Reiff<sup>1)</sup> regarde cette espèce d'extensions comme caractéristique de cette époque. Selon moi c'est au contraire une innovation dont les élèves des anciens géomètres voyaient très bien la faiblesse logique; mais son utilité pour l'invention mathématique est évidente. Ces extensions conjecturales — qui allaient se multiplier dans la période suivante — sont les compagnes naturelles des algorithmes: elles sont dues aux algorithmes incomplets, et servent ensuite à généraliser ces mêmes algorithmes. Celle qui nous occupe ici a été préparée par le nouveau calcul algébrique. Descartes avait introduit l'usage des exposants pour exprimer les puissances d'une manière abrégée. Cette notation et les analogies de calcul que l'invention des logarithmes avait rendues manifestes devaient inviter à attribuer aussi aux exposants des valeurs fractionnaires ou négatives. Même sans introduire encore expressément ces valeurs dans les notations — ce qui est un progrès ultérieur dû à Newton — Wallis a parfaitement reconnu les analogies exprimées par la notation généralisée. Il s'est alors laissé tenter de généraliser d'une manière semblable, mais sans démonstration propre, les résultats des quadratures de paraboles de degré entier, résultats qu'il avait trouvés à peu près par le même procédé dont Fermat s'était servi en 1636. Le succès

---

<sup>1)</sup> Reiff: *Geschichte der unendlichen Reihen* p. 13.



de cette extension <sup>1)</sup> lui a ensuite donné la hardiesse d'appliquer la même méthode inductive à sa célèbre quadrature du cercle, ou bien à l'intégration  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ . L'audace qui lui a donné confiance dans ses ingénieux groupements de résultats connus et dans les hardies combinaisons qu'il a faites de ces résultats a été récompensée par la découverte de la formule qui porte son nom; mais cette formule, il n'a pu la contrôler que par sa concordance avec les approximations de  $\pi$  alors connues, tandis que la démonstration rigoureuse a demandé des recherches toutes différentes des siennes.

Le même procédé devait bientôt porter une autre fruit par la découverte de la formule générale du binôme due à Newton <sup>2)</sup>. Newton nous apprend, en effet, lui-même qu'il l'a trouvée par une extension de celle qui a lieu pour les exposants entiers et positifs <sup>3)</sup>; mais il était trop rigoureux géomètre et trop fidèle élève des anciens pour regarder cette extension comme une démonstration. Il a donc démontré les applications particulières qu'il en a faites par des procédés qui pourraient aussi servir à la vérification de la formule générale. Seulement l'exposé complet d'une telle démonstration aurait été très long et très pénible. Leibniz, ce maître des algorithmes, semble avoir eu plus de confiance en leur généralité, et moins de scrupules à en profiter sans démonstration directe. Il étend immédiatement la différentiation de  $x^n$ , connue pour les valeurs positives et entières de  $n$ , à des valeurs fractionnaires, comme l'avait fait Wallis dans les quadratures.

<sup>1)</sup> Il a pu contrôler, en partie, ce succès en regardant la parabole ordinaire comme étant de l'ordre  $\frac{1}{2}$ . Il ne semble pas alors avoir eu connaissance des quadratures que Fermat avait déjà communiquées de temps en temps aux géomètres parisiens.

<sup>2)</sup> Comme nous devons parler dans une Note subséquente de la fondation du calcul infinitésimal, nous omettons ici les renvois relatifs à Newton et à Leibniz.

<sup>3)</sup> Il y avait été conduit par un détour résultant du but originaire de ses recherches.



Cette espèce de conclusions, si utiles pour l'invention, était moins dangereuse tant qu'elle se bornait à des résultats dont on ne négligeait pas de chercher d'autres vérifications, comme nous le voyons par l'exemple de Newton; mais les innombrables résultats auxquels devait conduire bientôt la routine des algorithmes donnaient une grande tentation d'appliquer les mêmes conclusions au delà des limites où leur usage était justifié par des démonstrations rigoureuses, et même d'oublier le besoin de donner aux démonstrations la même généralité qu'aux résultats qu'on en tirait. Ce sont les travaux des successeurs de Newton et Leibniz, et le développement ultérieur des algorithmes, qui ont rendu nécessaire plus tard le retour aux principes rigoureux des anciens, principes qui avaient été encore ceux de Viète, de Fermat, d'Huygens et de Newton. Cette réforme a été préparée par Lagrange, Gauss et plusieurs autres géomètres, et effectuée par l'immense travail de Cauchy, qui avait pour tâche de ramener à ces principes les grands progrès réalisés depuis la découverte du calcul infinitésimal, et d'en faire la base bien assurée de nouveaux progrès<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> M. Reiff distingue dans sa *Geschichte der unendlichen Reihen* les trois périodes suivantes: 1<sup>o</sup> *Die Periode von Newton und Leibniz*; 2<sup>o</sup> *Die Periode der formalen Behandlungsweise*; 3<sup>o</sup> *Die Periode der exacten Behandlungsweise*. Les autres parties des mathématiques aussi présentent aux mêmes époques les mêmes phases que caractérisent si bien les dénominations des deux dernières périodes. Quant à la première, il me semble que M. Reiff en néglige trop dans son livre un caractère très essentiel au point de vue de la rigueur, savoir sa connexion intime avec la géométrie antique, beaucoup mieux connue alors par les géomètres qu'elle ne le fut dans la période suivante, et qu'elle ne l'est à présent. Les exemples d'une rigueur plus grande dans cette période que celle qui était ordinaire dans la période suivante ne sont donc pas fortuits. Il ne faut pas s'étonner en voyant Lord Brouncker discuter la convergence de la série servant à exprimer  $\log 2$ . C'était alors un développement trop peu en usage pour qu'on ne s'assurât pas de sa justesse par une preuve, que plus tard la routine porta à négliger. En appliquant (comme Newton) sa série à une véritable évaluation numérique, Lord Brouncker avait besoin d'en connaître non seulement la convergence abstraite, mais aussi le degré de convergence. Il

Revenons aux quadratures qui précèdent la création du calcul infinitésimal. Il nous faut encore parler des applications qu'en ont faites Fermat et ses contemporains. C'est, en effet, avant tout en ayant égard à ces applications, identiques à une partie de celles qu'on fait à présent des intégrations, que nous avons pu regarder comme des intégrations les quadratures de courbes rapportées à des axes rectangulaires.

En première ligne se présentent les quadratures de courbes représentées à l'aide d'autres coordonnées, en particulier celles des spirales. Pour Fermat ces quadratures viennent immédiatement après celles des paraboles. Il imite à cet égard le grand Syracusain, qui donne les intégrations  $\int_0^a x dx$  et  $\int_0^a x^2 dx$  dans l'introduction de son livre sur les spirales, et qui exécute au moyen de la dernière la quadrature des secteurs de spirale d'une manière qui ressemble beaucoup à celle que nous exprimerions par les équations

$$s = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2 d\theta = \frac{a}{2} \int_0^r r^2 dr = \frac{a}{6} r^3.$$

Déjà en 1636, dans l'année même où il communiquait à Roberval ses quadratures des paraboles d'ordre entier, Fermat parle, dans une lettre du 3 juin adressée au

le fait en en renfermant le reste entre deux progressions géométriques de raisons  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{4}$ . La dernière progression est la même dont Archimède se sert dans sa quadrature de la parabole d'une manière absolument rigoureuse, et la convergence de ces deux progressions est une conséquence du critère — exact mais trop large — qu'Euclide énonce au commencement du 10<sup>e</sup> livre des *Éléments*, et qu'on peut énoncer ainsi: La valeur limite du produit  $v_1 v_2 v_3 \dots$  est égale à zéro si, à partir d'un certain facteur,  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$ . [Voir H.-G. Zeuthen: *Mathematikens Historie, Oldtid og Middelalder. Kjøbenhavn* 1893.] Newton cite expressément le critère d'Euclide et en tire le critère suivant de convergence d'une série: La série infinie  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  est convergente si, à partir d'un certain terme,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ . [Newton: *Opuscula* I, p. 27; voir aussi Reiff p. 30—31.]



P. Mersenne <sup>1)</sup>, d'un traité de *nouvelles hélices* (spirales), qu'il veut *dresser*, et il cite en exemple la spirale qui a pour équation  $\frac{r^2}{a^2} = \frac{\theta}{2\pi}$ . Il en énonce cette intéressante propriété qu'à l'exception de la première ses différentes spires sont égales entre elles. Dans sa lettre déjà citée du 4 novembre à Roberval il invite ce savant à prier le P. Mersenne de lui donner ses *nouvelles hélices* <sup>2)</sup>. Mersenne avait donc alors déjà reçu le traité en question, où Fermat aura toutefois omis les démonstrations, assez pénibles selon sa première lettre, ce qui ne l'empêche pas de dire dans la seconde lettre qu'elles seront probablement aussi aisées à Roberval que celles du conoïde et des paraboles. On ne doit pas regarder ce propos comme une politesse un peu malicieuse; car Fermat l'explique en disant, dans sa lettre du 16 décembre à Roberval <sup>3)</sup>, que la démonstration des quadratures des spirales est pareille à celle des nouvelles figures qu'il a carrées (les paraboles) ou cubées (certains conoïdes). Il a donc aussi carré les spirales des différents ordres au moyen des sommes des puissances semblables des nombres entiers que nous l'avons vu appliquer à sa première quadrature des paraboles des différents ordres. Bien qu'il n'ait pas encore réduit la première quadrature à la seconde, il a vu l'identité algébrique de ces deux questions. C'est sans doute sa connaissance de cette identité des aires qui l'a conduit plus tard à étendre aux paraboles et aux spirales de tous les ordres l'identité, découverte par Roberval et démontrée par Pascal, des arcs de la parabole et de la spirale ordinaires. Nous en parlerons tout à l'heure.

A une époque où l'on ne possédait pas la notion analytique des intégrales à laquelle se réduisent aujourd'hui les quadratures des paraboles et des spirales, la réduction de l'une à

<sup>1)</sup> *Varia Opera* p. 121.

<sup>2)</sup> *Ibid.* p. 147.

<sup>3)</sup> *Ibid.* p. 149.



l'autre était une ressource assez naturelle pour que nous comprenions qu'elle se soit imposée à plus d'un auteur. Nous ne partageons donc pas l'étonnement de M. Cantor quand il voit Cavalieri et Grégoire de Saint-Vincent se servir, l'un et l'autre, de la même réduction de la spirale d'Archimède à la parabole ordinaire, étonnement qui porte l'illustre historien à discuter avec beaucoup de soin la possibilité d'un plagiat<sup>1)</sup>, sans se soucier toutefois de l'usage d'une transformation semblable, fait un peu plus tard par les trois géomètres français.

Celle de Cavalieri et Grégoire de Saint-Vincent diffère un peu de celle de Fermat. La transformation d'une spirale d'Archimède  $\frac{r}{a} = \frac{\vartheta}{2\pi}$  en une parabole  $\frac{x}{\pi a} = \left(\frac{y}{a}\right)^2$  dont se servent Pascal et Fermat s'exprimerait au moyen des équations  $y = r$ ,  $\frac{x}{\pi a} = \left(\frac{r}{a}\right)^2$  ou  $x = \frac{r\vartheta}{2}$ , et grâce à notre connaissance de l'analyse actuelle nous en voyons l'utilité en remarquant que la différentiation de ces formules conduirait à

$$dy = dr, \quad dx = r d\vartheta,$$

et par conséquent à

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2, \quad y dx = r^2 d\vartheta.$$

On comprend qu'une telle transformation, ainsi que la transformation analogue des spirales d'ordre supérieur, ait pu se présenter à Fermat, si, à l'instar d'Archimède, il a pris pour éléments de l'aire de la spirale les secteurs infiniment petits. Cavalieri en obtient une qui est encore plus simple en décomposant l'aire comprise entre la spirale et le cercle de rayon  $a$  en des bandes courbes au moyen des arcs de cercles  $r\vartheta$ . Une de ces bandes aura l'aire  $r\vartheta \cdot dr$ . Si l'on pose  $r = x$ ,  $r\vartheta = y$ , on déduira de l'équation de la spirale

<sup>1)</sup> Cantor II, p. 765—766 et 775—776.

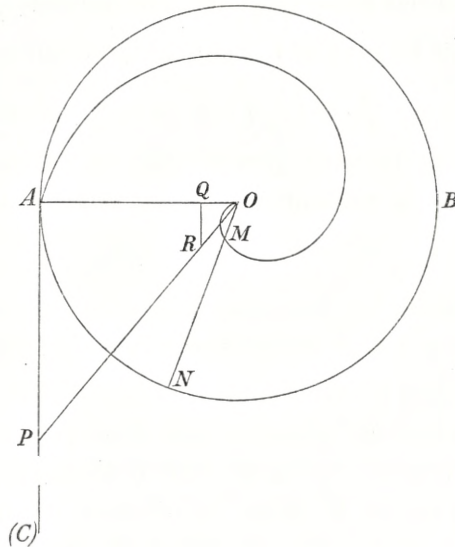
$$\frac{r}{a} = \frac{\vartheta}{2\pi}$$

que

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{r^2}{a^2} = \frac{r\vartheta}{2\pi a} = \frac{y}{2\pi a},$$

de façon que l'aire cherchée  $\int_0^a r \vartheta dr$  devienne égale à l'aire  $\int_0^a y dx$  limitée par la parabole dont nous venons de trouver l'équation et par les droites  $y = 0$  et  $x = a$ .

La transformation ne se présente pas moins immédiatement si l'on remplace nos formules par la figure dont on se servait alors. Celle-ci correspond plus immédiatement à la forme



suivante de l'équation de la spirale  $\frac{r}{a} = \frac{\vartheta a}{2\pi a}$ . Soit  $OA = a$ ,  $ANO$  un cercle de centre  $O$ ,  $M$  un point de la spirale,  $ON$  le rayon passant par  $M$ . L'équation précédente s'écrira  $\frac{OM}{OA} = \frac{\text{arc } AN}{\text{circ. } ANBA}$ . La transformation résultera alors de la substitution au rapport des deux arcs du rapport des deux



droites. Soit  $AC$  perpendiculaire à  $OA$ ,  $AC = \text{circ. } ANBA$  ( $= 2\pi a$ ) et  $\frac{AP}{AC} = \frac{AN}{ANBA}$  ou  $AP = \text{arc } AN$ ; alors la droite  $OP$  rencontrera évidemment l'ordonnée menée par le point  $Q$  dont l'abscisse  $OQ = OM$  en un point  $R$  de la parabole de Cavalieri. Cette construction de la parabole qu'on trouve dans l'*Opus Geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent<sup>1)</sup> se présente assez naturellement pour expliquer que ce savant ait pu, lui aussi, l'inventer sans avoir particulièrement en vue la quadrature de la parabole. Au contraire il regarde comme connues et la quadrature de la spirale et celle de la parabole, et la comparaison des résultats de ces deux quadratures ne se trouve qu'au milieu d'une série de plusieurs comparaisons semblables. La méthode de Grégoire de Saint-Vincent n'est pas une méthode de quadrature: par la démonstration de toutes les analogies des deux courbes, elle ressemble plutôt à une transformation géométrique moderne<sup>2)</sup>.

Une autre classe de questions, savoir les rectifications de courbes, se réduit pour nous à des intégrations; elles devaient par conséquent se réduire à des quadratures à l'époque qui nous occupe. Je suis donc hors d'état de comprendre la critique à laquelle M. Cantor soumet cette dernière réduction. Il le fait même à plusieurs reprises, mais surtout à la p. 828 de son t. II, où il trouve surprenant que Wallis, après avoir établi le résultat que nous exprimerions par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

tourne le dos à cette méthode pour avoir recours aux quadratures<sup>3)</sup>, et à la p. 829, où il dit que Fermat, au même point

<sup>1)</sup> *Spiralis et parabolæ symbolizatio*; *Opus Geometricum* p. 664—702.

<sup>2)</sup> Grégoire ne se borne pas du reste aux analogies qui résultent de la transformation. Celle de sa proposition IX n'est que fortuite.

<sup>3)</sup> *Es ist wirklich auffallend, dass Wallis dieser die Aufgabe unmittelbar ins Auge fassenden Methode . . . selbst wieder den Rücken kehrt.*

de sa recherche, s'écarte, avec la même inconséquence que Wallis, de la voie où il s'était engagé <sup>1)</sup>.

Il me semble qu'on pourrait avec autant de raison reprocher aux traités modernes, une fois établie la formule  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , de se servir d'une intégration pour exprimer l'arc au moyen des coordonnées de ses limites, et de renvoyer aux intégrations déjà exécutées pour trouver les expressions des arcs de courbes particulières.

Qu'est-ce donc que M. Cantor voudrait qu'eussent fait les auteurs dont nous parlons? M. Cantor répond en partie à cette question en renvoyant à la rectification de la cycloïde par Wren et en faisant remarquer que ce savant rattache immédiatement l'expression de l'arc aux recherches infinitésimales équivalant à une démonstration de la formule déjà citée; mais il n'est pas permis de demander la même chose lorsqu'il s'agit de courbes dont la rectification ne donne pas prise à des artifices géométriques semblables et dépend d'intégrations plus compliquées. Alors il faut bien en venir à exécuter l'intégration, sous une forme ou sous une autre, et, dans le cas où l'on connaît l'application de la même intégration à une quadrature, on aurait tort de négliger d'en faire ce nouvel usage. Or nous avons vu qu'on était déjà en possession d'un certain nombre d'intégrations sous forme de quadratures. La manière la plus générale d'exécuter les rectifications, c'était donc de les réduire à des quadratures.

Comme les remarques un peu surprenantes de M. Cantor ont contribué plus que toute autre chose à m'exciter à la présente étude, j'ai essayé de m'expliquer la raison du malentendu que je présume de sa part. Il semble que M. Cantor ait

---

<sup>1)</sup> *Sein erster Nachweis von der Möglichkeit einer Rectification ist im Character Wrens (c'est-à-dire une démonstration de la formule  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ), seine Ausführung der Rectification verlässt die eingeschlagene Bahn wieder mit der gleichen Folgewidrigkeit, wie Wallis sie übte.*



poursuivi un autre but que les auteurs qu'il critique. Comme il cherchait avant tout les contributions directes au système de mathématiques que nous possédons aujourd'hui, la résolution du problème de la rectification a consisté surtout pour lui dans la découverte des formules  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  et  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , grâce auxquelles nous regardons le problème comme résolu, parce que nous sommes déjà en possession du calcul intégral, qui nous permet de profiter de ces formules. Pour les auteurs qui nous occupent il ne suffisait pas d'inventer ces formules — ce qui ne semble pas d'ailleurs leur avoir causé de très grandes difficultés. — Les formules n'avaient pour eux aucune valeur tant qu'ils n'étaient pas en état d'en montrer l'utilité par des applications. Il ne pouvait s'agir pour eux d'écrire un chapitre de l'analyse moderne; il s'agissait de trouver les longueurs de courbes déterminées ou, du moins, de les comparer entre elles.

Voilà ce que confirme l'étude de la géométrie du milieu du XVII<sup>e</sup> siècle. Il est vrai que la première contribution directe à la théorie de la rectification des courbes que nous y rencontrons, celle qui se trouve dans l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis<sup>1)</sup> (1655), a un caractère assez général. En effet, pour mesurer les arcs de paraboles et de spirales, Wallis inscrit dans ces arcs des polygones dont il détermine les côtés par les formules  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  et  $\sqrt{\Delta r^2 + r^2 \Delta \theta^2}$ ; mais il ne s'agit ici que d'évaluations approchées, et Wallis n'en déduit aucun résultat positif. Pour cette raison ce passage n'a pas été bien apte à attirer l'attention de ses contemporains, et Wallis lui-même est le seul qui le rappelle dans une lettre à Huygens après la découverte de véritables rectifications par d'autres géomètres<sup>2)</sup>.

Nous attirons ici en particulier l'attention sur une suite

<sup>1)</sup> Wallis *Opera* I, p. 380—381.

<sup>2)</sup> Ibid. p. 550.

de découvertes relatives à la détermination des arcs de courbes qui ont été faites de l'autre côté de la Manche, et dont l'origine du moins est absolument indépendante de toute connaissance des recherches de Wallis. En premier lieu vient la découverte, faite par Roberval entre 1643 et 1658<sup>1)</sup>, de l'égalité déjà mentionnée des arcs d'une parabole ordinaire et d'une spirale d'Archimède. Selon Pascal il l'a prouvée *par les mouvements*. Connaissant la méthode des tangentes particulière à Roberval, on n'hésitera pas à supposer que son procédé a consisté en des décompositions de vitesses analogues à celles de l'élément  $ds$  en  $dx$  et  $dy$  ou en  $dr$  et  $r d\vartheta$ . On en doutera d'autant moins que ces décompositions conduisent immédiatement à l'égalité des éléments  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  de la parabole et  $\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}$  de la spirale, ce que nous avons déjà fait remarquer. Néanmoins Pascal n'a pas tort de ne point regarder comme *absolument convaincante* une telle démonstration, quoiqu'il ait du reste dans le talent de son ami une confiance très bien fondée dans ce cas. Pascal ne demandait pas, comme on le fait aujourd'hui, une définition de la notion de longueur appliquée aux courbes; mais il a présenté cette question sous la forme que lui avait donnée Archimède en exprimant par des postulats<sup>2)</sup> ce que c'était qu'une telle longueur. Grâce aux postulats d'Archimède, il renferme les longueurs en question entre deux limites qu'on peut rapprocher indéfiniment l'une de l'autre, et il a donné ainsi du théorème de Roberval une démonstration aussi rigoureuse que celles des anciens.

L'étude que Fermat avait déjà faite des paraboles et des spirales d'ordre supérieur dont nous avons parlé plus haut lui permettait d'étendre le théorème de Roberval à ces courbes

<sup>1)</sup> Voir la lettre de M. Dettonville (Pascal) à M. A. D. D. S. du 10 décembre 1658. *Œuvres de Pascal* (éd. de 1779) V, p. 426 et s.

<sup>2)</sup> *Archimedis Opera* (éd. Heiberg) t. I, p. 8. L'usage et la portée de ces postulats sont expliqués aux p. 154—155 de mes *Leçons sur Mathématiques Historie*.



plus compliquées. Son théorème général, qu'il a communiqué à Lalouvière, et que ce savant jésuite a publié au nom de Fermat en 1660<sup>1)</sup>, peut être exprimé de la manière suivante dans le langage mathématique actuel: La longueur de la première spire (depuis  $\vartheta = 0$  jusqu'à  $\vartheta = 2\pi$ ) de la spirale

$$\left(\frac{r}{a}\right)^m = \left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)^n$$

est égale à la longueur de l'arc de la parabole

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{m+n} = \left(\frac{x}{\frac{m}{m+n} 2\pi a}\right)^n$$

depuis  $y = 0$  jusqu'à  $y = a$ . Fermat ne démontre pas ce théorème, mais du renvoi qu'il fait à la démonstration du théorème particulier due à Pascal, il résulte que sa propre démonstration ne devait guère différer de la vérification que nous obtiendrions en posant

$$y = r, \quad \left(\frac{(m+n)x}{m \cdot 2\pi a}\right)^m = \left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)^{m+n},$$

ce qui conduit, grâce à l'équation de la spirale donnée, à

$$dy = dr, \quad dx = r d\vartheta.$$

La communication faite à Lalouvière par Fermat contient d'autres résultats remarquables sur la longueur des arcs de paraboles. Ces résultats qui devancent le théorème cité font même supposer qu'avant la démonstration de Pascal Fermat avait aussi commencé de s'occuper du problème de la rectification<sup>2)</sup>. Il ne se borne pas à la comparaison des arcs de différentes courbes, mais il compare les arcs à des aires limitées par des courbes, ou bien il réduit la rectification à la

<sup>1)</sup> Fermat: *Œuvres* I, p. 207.

<sup>2)</sup> La partie de ces recherches qui a trait à la cycloïde doit dater d'une époque postérieure à 1658 parce que c'est seulement cette année-là qu'on apprit à connaître la rectification de cette courbe due à Wren; mais la circonstance que Fermat a su démontrer *sur-le-champ* (Pascal: *Histoire de la Roulette*) le résultat trouvé par Wren porte à croire qu'il était déjà familier avec les principes de la rectification des courbes.

quadrature. Il indique en particulier l'égalité des arcs de paraboles ordinaires avec des aires limitées par des hyperboles ordinaires, réduction qui devait dans les mathématiques d'alors tenir lieu d'une réduction à des fonctions logarithmiques.

Fermat ne se borne pas à constater que le rapport d'un arc  $s$  de la parabole  $y^2 = px$  à l'ordonnée  $y$  est égal à celui de l'aire limitée par l'hyperbole  $x^2 = y^2 + \frac{p^2}{4}$ , les deux axes et la parallèle à l'axe des  $x$  menée par l'extrémité de l'ordonnée  $y$ , au rectangle  $\frac{p}{2}y$ , ou bien que

$$s = \frac{2}{p} \int_0^y \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{4}} dy; \text{ } ^1)$$

il prouve encore sa familiarité avec la méthode par plusieurs autres applications. Il cherche par exemple les arcs d'une série de courbes commençant par la parabole ordinaire, et où les points correspondants ont la même abscisse  $x$ , tandis que dans chacune de ces courbes l'ordonnée ( $y_r$ ) est égale à l'arc ( $s_{r-1}$ ) de la courbe précédente. Fermat dit que le rapport de l'arc  $s_r$  d'une de ces courbes à l'arc de la première parabole qui correspond à l'abscisse  $rx$  est égal à celui des ordonnées qui correspondent dans la première parabole aux abscisses  $x$  et  $rx$ . Le mémoire contient encore une autre extension de la même nature.

Fermat étend même sa méthode à la recherche de l'aire  $(2\pi \int_0^s x ds)$  de la surface engendrée par la révolution de l'arc  $s$  de la parabole  $y^2 = px$  autour de l'axe des  $y$ . Il trouve cette aire égale à celle d'un cercle ayant pour rayon la diagonale

---

<sup>1)</sup> *Œuvres* I, p. 199 et s. Dans son *Horologium oscillatorium* 1673, Huygens revient sur la même comparaison.



d'un carré d'aire  $\int_0^x \sqrt{x^2 + \frac{p}{4}x} dx$ , c'est-à-dire que l'aire cherchée est égale à  $2\pi \int_0^x \sqrt{x^2 + \frac{p}{4}x} dx$ .

Dans un autre théorème Fermat déduit de la rectification de la cycloïde trouvée par Wren la détermination d'autres courbes transcendentes rectifiables, et même de surfaces de révolution carrables. Nous n'insisterons pas sur ce point, en ayant dit assez pour montrer qu'à l'époque où il trouva la première rectification algébrique d'une courbe algébrique Fermat était déjà en pleine possession des principes qui servent aujourd'hui à faire dépendre la rectification d'une intégration. C'est la découverte de cette rectification algébrique — dans laquelle il avait été précédé, à son insu, par Neil et van Heuraet — qui donna, à ses yeux et à ceux de ses contemporains, aux principes dont nous venons de parler leur véritable raison d'être ou du moins le caractère d'utilité le plus incontestable.

C'est la parabole semicubique  $ay^2 = x^3$  que ces trois savants ont rectifiée. Fermat avait déjà autrefois<sup>1)</sup> pris la même courbe pour exemple de ses quadratures, et nous venons de le voir en possession des moyens d'en réduire la rectification à la quadrature d'une parabole ordinaire  $(s = \int \sqrt{1 + \frac{9}{4} \frac{x}{a}} dx)$ ; mais jusqu'alors il n'avait pas prévu un résultat si simple de l'essai d'exécuter effectivement cette rectification.

On voit le prix que Fermat attache à cette découverte par le fait que, dérogeant à ses habitudes, il se met immédiatement à la publier avec des démonstrations complètes<sup>2)</sup>. Et s'il

<sup>1)</sup> *Œuvres* I, p. 197.

<sup>2)</sup> *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica. Œuvres* p. 211; *Varia Opera* p. 89.

y attache un tel prix, c'est à raison d'un préjugé qui avait commencé de prendre naissance, à savoir que la longueur d'une courbe algébrique ne pouvait jamais dépendre algébriquement des coordonnées de ses limites. Ce préjugé, qui est lui-même une preuve des efforts antérieurs faits pour rectifier les courbes; ne s'est pas borné originairement aux courbes algébriques; et cependant la rectification de la cycloïde par Wren avait montré à la prétendue règle une exception, qu'on expliquait en faisant remarquer que cette courbe (ou ses coordonnées) dépendait elle-même d'arcs de cercle. On apprend à connaître par la préface de Fermat ce préjugé partagé par Descartes<sup>1)</sup>, Sluze et Pascal<sup>2)</sup>.

Les démonstrations complètes que contient le mémoire de Fermat nous expliquent très bien la paresse dont Fermat s'accuse lui-même quant à l'exécution des démonstrations. Une véritable démonstration était pour lui, comme pour Pascal dans le mémoire déjà cité, une réduction aux principes d'Archimède, exécutée avec toute la rigueur qu'on exigeait dans l'antiquité, rigueur infiniment plus grande que celle dont on se contenta plus tard lorsqu'on y substitua la routine contractée par l'usage du calcul différentiel<sup>3)</sup>. Pour exposer ses démonstrations, Fermat avait à sa disposition d'abord les figures géométriques comme les anciens, et ensuite le langage algébrique de son temps. Trop conservateur pour en employer les innovations contemporaines, il se contentait des notions de Viète.

Fermat était un esprit assez puissant pour saisir, retenir et combiner au moyen de ces modestes instruments tous les rapports mutuels des quantités que, dans ce qui précède, nous avons essayé de rendre clairs aux lecteurs au moyen de nota-

1) *Géométrie*, édition de 1886 p. 33.

2) Pascal: *Œuvres*, édition de 1779, c. V, p. 413.

3) Nous pouvons renvoyer à cet égard à l'*Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal* de M. Mansion, faisant suite à son Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale.



tions empruntées à l'algèbre moderne et au calcul différentiel et intégral; mais une véritable démonstration, qui s'adressait à des esprits moins vigoureux, et où même une lacune facile à remplir était considérée comme une faute, devait comporter une multitude de détails dont on peut se passer à présent grâce aux principes une fois établis du calcul infinitésimal, mais qui rendraient très longue une démonstration faite dans le langage mathématique du XVII<sup>e</sup> siècle. C'est ce que prouvent les démonstrations contenues dans son mémoire *De linearum curvarum*, etc. A en juger par celles-là, on comprend combien seraient longues les démonstrations des nombreux autres résultats de calcul infinitésimal dont nous avons rendu compte. En voyant l'exactitude des démonstrations du mémoire cité, on sent Fermat très capable de démontrer aussi rigoureusement les autres résultats, si, bien entendu, il en avait le loisir et la patience. Il est donc assez heureux que Fermat ignorât en 1660 que Neil et van Heuraet avaient déjà rectifié la même courbe, sans quoi il ne se serait pas donné la peine de faire une rédaction si complète, et qui jette aussi quelque jour sur ses autres recherches.

Connaissant le prix que Fermat attachait à la découverte d'une courbe algébrique rectifiable algébriquement, on ne s'étonne pas qu'il se soit empressé d'essayer d'en découvrir d'autres. Le désir d'en multiplier le nombre l'a même empêché de voir qu'une classe de courbes qu'il déduit des paraboles semicubiques  $ay^2 = x^3$  ne diffère pas de ces paraboles: ce sont celles qu'il formait en prenant les arcs déjà trouvés pour ordonnées correspondant aux mêmes abscisses. Wallis ne laissa pas de faire cette observation. Au contraire la substitution des arcs aux abscisses correspondant aux mêmes ordonnées fournit un moyen, recommandé aussi par Fermat, de trouver réellement de nouvelles courbes rectifiables.

Peu d'années après, Huygens inventa un moyen de former une infinité de classes de courbes algébriques et rectifiables

algébriquement, savoir les développées des courbes algébriques. Celles dont Fermat connaissait ou recommandait la rectification sont les développées de paraboles et d'hyperboles ordinaires. Toutefois la méthode d'Huygens n'appartient pas à la période préparatoire au calcul intégral qui nous occupe ici.

Ayant vu par l'exemple des rectifications jusqu'à quel point les quadratures étaient pour Fermat, et pour une partie de ses contemporains, de véritables intégrations, qu'on savait appliquer aussi à d'autres questions géométriques, nous ne nous arrêterons ni aux quadratures de surfaces courbes de Fermat — auxquelles nous avons déjà fait allusion — ni à celles d'Huygens, ni aux nombreuses cubatures effectuées à la même époque. En ce qui concerne celles-ci, il faut convenir qu'elles ont été faites en partie par des études stéréométriques directes sans aucune réduction à des quadratures. Néanmoins on savait faire usage, là où il en était besoin, de la connexion des deux ordres de questions qui s'était déjà révélée par l'uniformité des méthodes qu'y appliquait Archimède. Nous occupant ici particulièrement de Fermat, nous nous bornerons à faire observer que, dans les mêmes lettres où il parle des quadratures de paraboles et de spirales de différents ordres, il revient à plusieurs reprises<sup>1)</sup> à la cubature d'un certain *conoïde*, celui qu'on obtient en faisant tourner un segment de parabole ordinaire limitée par une corde perpendiculaire à l'axe autour de cette corde. Il détermine le volume du segment de ce *conoïde* qui est limité par un plan perpendiculaire à son axe de rotation. Fermat donne une expression exacte du volume de ce segment; mais il n'explique pas comment il a trouvé ce résultat, qui dépend, sous une forme ou sous une autre, des intégrations  $\int x^n dx$ , intégrations qu'il représentait en même temps par les quadratures des paraboles.

<sup>1)</sup> *Varia Opera* pp. 132, 137 et 147, et pour le centre de gravité p. 146.



On croirait que Fermat a dû obtenir ses déterminations des centres de gravité des segments de paraboles et de paraboloides par les mêmes intégrations. On s'étonne donc de voir qu'il les fait dépendre de la différentiation, opération dont les premiers principes lui sont dus. Remarquons, avant d'en parler, qu'à cet égard Fermat se distinguait de ses contemporains. Il signale, en effet, expressément dans sa lettre à Roberval<sup>1)</sup> du 16 décembre 1636 ce caractère singulier de sa méthode, en disant qu'elle *ne suppose point la connoissance de la quadrature, ce qui vous semblera merveilleux jusques à ce que vous l'aurez veu*. Il en résulte qu'on savait à cette époque faire dépendre la détermination des centres de gravité des quadratures, qui étaient alors la forme d'intégration la plus connue. Avec plus ou moins de régularité et de conscience on aura fait cette réduction par des considérations semblables à celles qu'un peu plus tard Pascal a énoncées expressément, c'est-à-dire par une sommation de moments statiques.

Mais comment Fermat a-t-il pu résoudre par la différentiation une question dont la solution dépend en réalité de l'intégration? Cela n'étonnera pas moins un géomètre moderne que Roberval. Consultons donc à cet égard sa *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*<sup>2)</sup> où il énonce la règle de différentiation et applique ce procédé: 1° à la recherche indiquée par le titre du mémoire; 2° à la détermination des tangentes, et 3° à celle des centres de gravité. La règle qui sert à la première de ces applications, et qu'il commence par énoncer, peut être exprimée dans le langage des mathématiques modernes de la manière suivante: Les valeurs de  $x$  qui rendent la fonction  $f(x)$  *maxima* ou *minima* sont déterminées par l'équation

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

<sup>1)</sup> *Varia Opera* p. 149.

<sup>2)</sup> *Ibid.* p. 63; *Œuvres I*, p. 133.

Seulement, la fonction  $f(x)$  étant rationnelle, la détermination de la valeur limite se fait simplement en divisant le numérateur par  $h$  et en remplaçant ensuite  $h$  par 0.

Sa détermination des tangentes se fait par celle du segment de l'axe des abscisses auquel on a donné plus tard le nom de sous-tangente. On pourrait dire qu'il en exprime la valeur par

$$y \lim \frac{h}{f(x+h) - f(x)},$$

$y = f(x)$  étant l'équation de la courbe; mais comme  $y$  n'est donné, en général, qu'implicitement par une équation entre  $x$  et  $y$ , Fermat, pour déterminer la sous-tangente, a recours à peu près aux mêmes calculs qui servent aujourd'hui à la détermination du quotient différentiel de la fonction donnée implicitement par l'équation. Sans introduire la notation de quotient différentiel, Fermat sait donc le former et l'appliquer aux deux sortes de questions indiquées ici.

Fermat montre comment le même procédé peut servir à la détermination du centre de gravité, en l'appliquant à trouver celui d'un segment de paraboloïde de révolution. En considérant cet exemple, on voit qu'il fait l'hypothèse que ce centre de gravité doit diviser la hauteur du segment dans un rapport indépendant de cette hauteur. Dès lors il n'est plus étonnant qu'une différentiation suffise pour résoudre cette question, qui, d'après sa nature, dépend d'une intégration. La différentiation sert à la fois à vérifier l'hypothèse et à déterminer la valeur du rapport. Désignant par  $x$  la hauteur du segment de paraboloïde et par  $mx$  la distance du sommet du paraboloïde au centre de gravité, il faut déterminer le rapport  $m$ . Si l'on décompose, au moyen d'un plan parallèle à la base, le segment considéré en un nouveau segment et en une tranche de paraboloïde, le centre de gravité de celle-ci se trouvera à son intérieur, et celui du nouveau segment, d'après l'hypothèse, à la distance  $mh$  de celui du segment donné,  $h$  étant la hauteur de la tranche.

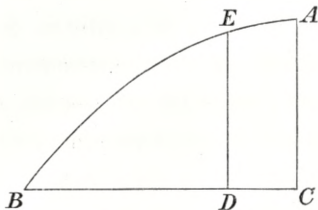


Il résulte donc de propositions connues de statique que le rapport de  $mh$  à  $x - mx - h'$  (où  $h' < h$ ) est égal à celui du volume de la tranche au volume du petit segment de parabolôïde, ou bien, puisque les volumes des segments de parabolôïde sont proportionnels aux carrés des hauteurs, que

$$\frac{mh}{x - mx - h'} = \frac{x^2 - (x - h)^2}{(x - h)^2}.$$

En divisant par  $h$  et en faisant  $h = h' = 0$ , on trouve que  $m = \frac{2}{3}$ .

On voit immédiatement que la même méthode est applicable aux segments de paraboles et de parabolôïdes de tous les ordres. La même hypothèse sur la division de la hauteur par le centre de gravité reste, en effet, légitime dans tous ces cas. Mais Fermat dit qu'il a obtenu aussi la détermination du centre de gravité du volume du corps qu'il appelle *son nouveau conoïde*, corps résultant de la rotation d'un demi-segment de parabole ordinaire  $ABC$  autour de l'ordonnée (demi-corde)  $BC$  qui le limite ( $AB$  est un arc de parabole,  $A$  son sommet,  $AC$  un segment de l'axe, et  $BC$  est perpendiculaire à  $AC$ ).



Sur cette détermination Fermat se contente de dire qu'elle se fait par une méthode semblable<sup>1)</sup>. Il n'est pas permis en tout cas d'y appliquer la même hypothèse qu'aux autres parabolôïdes et aux paraboles; mais il est probable qu'il a trouvé son résultat, qui est juste, en réduisant la détermination du centre de gravité cherché à celle des centres de gravité d'autres parabolôïdes. En effet, nous avons déjà dit que Fermat connaissait le volume, non seulement du conoïde total résultant de la rotation de  $ABC$ , mais aussi du segment de ce conoïde qui résulte de la rotation de  $EBD$ , la droite  $ED$  étant parallèle à

<sup>1)</sup> *Œuvres* I, p. 139.

l'axe  $AC$  de la parabole. Désignons par  $x$  la hauteur ( $BD$ ) de ce segment, par  $p$  le paramètre de la parabole et par  $a$  la demi-corde  $BC$ . Alors l'expression du segment  $BDE$  du conoïde trouvée par Fermat peut s'écrire

$$\frac{\pi}{p^2} \left( \frac{4}{3} a^2 x^3 - a x^4 + \frac{x^5}{5} \right).$$

Elle se compose de trois termes respectivement proportionnels à  $x^3$ ,  $x^4$  et  $x^5$ . Les centres de gravité des conoïdes dont les volumes s'expriment par ces trois termes seront, d'après la méthode appliquée par Fermat aux paraboloides ordinaires, aux distances  $\frac{3}{4}x$ ,  $\frac{4}{5}x$  et  $\frac{5}{6}x$  du sommet. Le centre de gravité du volume résultant sera donc à la distance

$$\frac{a^2 x^4 - \frac{4}{5} a x^5 + \frac{x^6}{6}}{\frac{4}{3} a^2 x^3 - a x^4 + \frac{x^5}{5}}$$

du sommet  $B$ , distance qui pour  $x = a$  est égale à  $\frac{11}{16}a$ .

Il serait très difficile de prévoir comment Fermat aurait exposé un tel raisonnement, s'il s'était donné la peine de le faire; mais on ne saurait guère s'en imaginer un autre grâce auquel il aurait pu appliquer sa méthode à la question qui nous occupe, et le fait est qu'il est arrivé à un résultat exact.